Una breve historia del problema del tiempo en la gravitación cuántica

Donald Salisbury

Austin College

27 de mayo, 2011

Overview

Growing up with Peter Bergmann

Figure: Max Bergmann with son Peter

Figure: Peter Bergmann's aunt, Clara Grunwald. Founder of the German Montessori movement

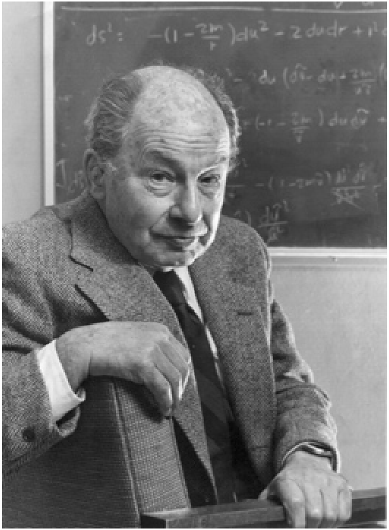


Figure: Peter Bergmann in 1982

Rosenfeld and Pauli

"Vine a Zurich antes del semestre de verano. Vine directamente de Göttingen, donde estaba todavía en ese momento. Ya había tenido correspondencia con Bohr, preguntándole si podría venir a Copenhage, y le escribi a Pauli, entonces para preguntarle si él me emplearía. Muy amablemente me contestó: será un placer; acabamos de terminar un esquema de electrodinámica cuántica con Heisenberg; ésa es un área que todavía no ha sido explorada. Pauli estaba ansioso por poner a la gente a pulir los detalles y explorar las consecuencias, y eso es lo que hice en Zurich." (AHQM 7/19/63, p 5)

“ Pauli me retó a atacar el problema de la cuantización de la gravitación y los efectos de la gravitación en los quanta de la luz, que en ese momento eran mucho más interesantes. Cuando le expliqué a Pauli en qué yo querá trabajar, creo que en ese momento era el efecto Kerr, o algún efecto óptico,Í me contestó: Bueno, usted puede hacerlo, y desde ahora me alegro por cualquier resultado que usted encuentre. Esa era su forma de decir que este problema no era muy instructivo, que el resultado podría ser cualquiera, mientras en ese momento, el cálculo de la auto-energa del quantum de la luz surgiendo de su campo gravitacional se hacía con un propsito definido.” (AHQM 7/19/63, p 8)

“Entonces Pauli me dijo que él no estaba contento en lo más mnimo con las ondas longitudinales, así que l quera que se trataran en otra forma, lo que yo hice, pero esto no fue ms ilustrativo. Todo lo contrario.” (AHQM 7/19/63, p 9)

“Cuando yo estaba investigando estas relaciones en el especialmente instructivo ejemplo de teora gravitacional, el profesor Pauli me dio ayuda indicndome los principios de una forma ms simple y ms natural de aplicar el proceso hamiltoniano in presencia de identidades. Este proceso no est sujeto a las desventajas de mtodos ms tempranos

Translation and commentaries

- Traduccin y comentario de Zur Quantelung der Wellenfelder de Leon Rosenfeld, Max Planck Institut para historia de la ciencia, pre-impresin,381., Max Planck Institute for the History of Science Preprint 381
- Leon Rosenfeld y el desafo del momento que desaparece en electrodinmica cuntica., *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 40 (2009) 363
- Leon Rosenfeld y sus pasos pioneros hacia una teora cuntica de la gravedad, J. Phys.: Conf. Ser. 222 (2010) 012052

Transformaciones de coordinadas de Rosenfeld.

Considera transformaciones coordinadas infinitesimales $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\nu}$, donde

$$\delta x^{\nu} = a_r^{\nu,0}(x)\epsilon^r(x) + a_r^{\nu,\sigma}(x)\frac{\partial \epsilon^r}{\partial x^{\sigma}} + \cdots ,$$

Assumes variables Q_{α} transform as

$$\delta Q_{\alpha} = c_{\alpha r}(x, Q)\epsilon^r(x) + c_{\alpha r}^{\sigma}(x, Q)\frac{\partial \epsilon^r}{\partial x^{\sigma}} + c_{\alpha r}^{\sigma\cdots\tau}(x, Q)\frac{\partial^j \epsilon^r}{\partial x^{\sigma}\cdots\partial x^{\tau}}.$$

Ejemplo de una partcula relativstica libre: $q^{\mu}(t)$ es una posicin de tiempo y espacio parametrizada. Bajo la reparametrizacin infinitesimal

$$t' = t - \epsilon(t)$$

$$\delta q^{\mu} := q'^{\mu}(t') - q^{\mu}(t) = 0,$$

and

$$\delta N = \dot{\epsilon} N,$$

Transformaciones de coordinadas de Rosenfeld.

Considera transformaciones coordinadas infinitesimales $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\nu}$, donde

$$\delta x^{\nu} = a_r^{\nu,0}(x)\epsilon^r(x) + a_r^{\nu,\sigma}(x)\frac{\partial \epsilon^r}{\partial x^{\sigma}} + \cdots ,$$

Assumes variables Q_{α} transform as

$$\delta Q_{\alpha} = c_{\alpha r}(x,Q)\epsilon^r(x) + c_{\alpha r}^{\sigma}(x,Q)\frac{\partial \epsilon^r}{\partial x^{\sigma}} + c_{\alpha r}^{\sigma\cdots\tau}(x,Q)\frac{\partial^j \epsilon^r}{\partial x^{\sigma}\cdots\partial x^{\tau}}.$$

Ejemplo de una partcula relativstica libre: $q^{\mu}(t)$ es una posicin de tiempo y espacio parametrizada. Bajo la reparametrizacin infinitesimal

$$t' = t - \epsilon(t)$$

$$\delta q^{\mu} := q'^{\mu}(t') - q^{\mu}(t) = 0,$$

and

$$\delta N = \dot{\epsilon} N,$$

Rosenfeld Lagrangian

Considera funciones de Lagrange que son cuadrticas en las derivadas de campo.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(Q_{\alpha,\nu}\mathcal{A}^{\alpha\nu,\beta\mu}(Q)Q_{\beta,\mu}$$

$$+Q_{\alpha,\nu}\mathcal{B}^{\alpha\nu}(Q) + \mathcal{B}^{\alpha\nu}(Q)Q_{\alpha,\nu}$$

$$+\mathcal{C}(Q)\Big)\,.$$

Asume que la δQ_α son transformaciones de simetra de manera que el Langrangiano se transforma como una densidad escalar de peso uno:

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \equiv 0. \qquad (1)$$

Ejemplo de una partcula libre relativstica:

$$L = \frac{1}{2\,N}\eta_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu - \frac{1}{2}m^2c^2N$$

Under $\delta t = \epsilon(t)$,

$$\delta L + L\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \equiv 0.$$

Rosenfeld Lagrangian

Considera funciones de Lagrange que son cuadrticas en las derivadas de campo.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(Q_{\alpha,\nu}\mathcal{A}^{\alpha\nu,\beta\mu}(Q)Q_{\beta,\mu}$$
$$+Q_{\alpha,\nu}\mathcal{B}^{\alpha\nu}(Q) + \mathcal{B}^{\alpha\nu}(Q)Q_{\alpha,\nu}$$
$$+\mathcal{C}(Q)\Big).$$

Asume que la δQ_α son transformaciones de simetra de manera que el Langrangiano se transforma como una densidad escalar de peso uno:

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \equiv 0. \qquad (1)$$

Ejemplo de una partcula libre relativstica:

$$L = \frac{1}{2\,N}\eta_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu - \frac{1}{2}m^2c^2N$$

Under $\delta t = \epsilon(t)$,

$$\delta L + L\frac{\partial\epsilon}{\partial t} \equiv 0.$$

The origin of constraints

Canonical momentum

$$\mathcal{P}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \mathcal{A}^{\beta\nu,\alpha 0} Q_{\beta,\nu}$$

En la identidad (1)los coeficientes de cada orden de tiempo derivativo de ϵ^μ se debe desaparecer en forma idntica. Enfocndose en el segundo trmino derivativo deducimos de $\delta \mathcal{L} = \mathcal{P}^\mu c^0_{\mu r} \ddot{\epsilon}^r + \cdots \equiv 0$ que

$$\mathcal{P}^\mu c^0_{\mu r} \equiv 0$$

Estos son vnculos primarios.

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} \equiv 0.$$

The origin of constraints

Canonical momentum

$$\mathcal{P}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha}} = \mathcal{A}^{\beta\nu,\alpha 0} Q_{\beta,\nu}$$

En la identidad (1)los coeficientes de cada orden de tiempo derivativo de ϵ^{μ} se debe desaparecer en forma idntica. Enfocndose en el segundo trmino derivativo deducimos de $\delta\mathcal{L} = \mathcal{P}^{\mu} c^{0}_{\mu r} \ddot{\epsilon}^{r} + \cdots \equiv 0$ que

$$\mathcal{P}^{\mu} c^{0}_{\mu r} \equiv 0$$

Estos son vnculos primarios.

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} \equiv 0.$$

Singular Lagrangian

Los vnculos primarios dan vectores null de la matriz de Legendre. $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha \partial \dot{Q}_\alpha}$,

$$\mathcal{A}^{\alpha 0, \mu 0} c^0_{\mu r} \equiv 0.$$

La matriz de Legendre es

$$\begin{pmatrix} N^{-1}\eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con el vector null

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Singular Lagrangian

Los vnculos primarios dan vectores null de la matriz de Legendre. $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha \partial \dot{Q}_\alpha}$,

$$\mathcal{A}^{\alpha 0, \mu 0} c^0_{\mu r} \equiv 0.$$

La matriz de Legendre es

$$\begin{pmatrix} N^{-1}\eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con el vector null

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

The Hamiltonian

Since

$$\mathcal{P}^{\alpha} = \mathcal{A}^{\alpha 0,\mu 0} \dot{Q}_{\mu} + \cdots , \quad (2)$$

Las velocidades no estn fijas nicamente en los trminos de los momentos. Ms bien,

$$\dot{Q}_{\mu} = \frac{\partial\, {}^0\mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}^{\mu}} + \lambda^r c^0_{\mu r}$$

$$= \frac{\partial \left({}^0\mathcal{H} + \lambda^r \mathcal{P}^{\nu} c^0_{\nu r} \right)}{\partial \mathcal{P}^{\mu}} = \frac{\partial\, \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}^{\mu}},$$

where the λ^r are arbitrary spacetime functions.

$$H_D = \frac{N}{2}\left(p^2 + m^2 c^2\right) + \lambda p_N$$

and in particular

$$\dot{N} = \lambda$$

The Hamiltonian

Since

$$\mathcal{P}^{\alpha} = \mathcal{A}^{\alpha 0,\mu 0}\dot{Q}_{\mu} + \cdots , \quad (2)$$

Las velocidades no estn fijas nicamente en los trminos de los momentos. Ms bien,

$$\dot{Q}_{\mu} = \frac{\partial\, {}^{0}\mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}^{\mu}} + \lambda^{r} c^{0}_{\mu r}$$

$$= \frac{\partial \left({}^{0}\mathcal{H} + \lambda^{r}\mathcal{P}^{\nu} c^{0}_{\nu r} \right)}{\partial \mathcal{P}^{\mu}} = \frac{\partial\, \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}^{\mu}},$$

where the λ^{r} are arbitrary spacetime functions.

$$H_D = \frac{N}{2}\left(p^2 + m^2 c^2\right) + \lambda p_N$$

and in particular

$$\dot{N} = \lambda$$

El generador de transformaciones GAUGE

Rosenfeld comprob que las variaciones activas Gauge de Q y $\mathcal{P}$ generadas por

$$\overline{\mathcal{M}} := \int d^3x\, \mathcal{P}^\alpha \delta Q_\alpha$$

$$-\mathcal{H}\delta x^0 - \mathcal{P}^\alpha Q_{\alpha,a}\delta x^a.$$

$$G = p_N N\dot{\epsilon}$$

$$+\left(\frac{N}{2}\left(p^2 + m^2c^2\right) + \lambda p_N\right)\epsilon$$

So

$$\bar{\delta} q^\mu = N p^\mu \epsilon,\ \bar{\delta} p^\mu = 0,$$

and

$$\bar{\delta} N = \lambda\epsilon + N\dot{\epsilon}$$

Nota: λ estropea la propiedad del gr

El generador de transformaciones GAUGE

Rosenfeld comprob que las variaciones activas Gauge de Q y $\mathcal{P}$ generadas por

$$\overline{\mathcal{M}} := \int d^3x\, \mathcal{P}^\alpha \delta Q_\alpha$$

$$-\mathcal{H}\delta x^0 - \mathcal{P}^\alpha Q_{\alpha,a}\delta x^a.$$

$$G = p_N N\dot{\epsilon}$$

$$+\left(\frac{N}{2}\left(p^2 + m^2c^2\right) + \lambda p_N\right)\epsilon$$

So

$$\bar{\delta} q^\mu = N p^\mu \epsilon,\ \bar{\delta} p^\mu = 0,$$

and

$$\bar{\delta} N = \lambda\epsilon + N\dot{\epsilon}$$

Nota: λ estropea la propiedad del gr

El generador GAUGE es constante en el tiempo

Rosenfeld comprob que $\frac{d\overline{\mathcal{M}}}{dt} = 0$. En consecuencia, los coeficientes de las derivadas de tiempo de ϵ deben desaparecer, y que generalmente,

$$\overline{\mathcal{M}} = \int d^3x \left(\frac{d\epsilon^r}{dt} p^\mu c^0_{\mu r} - \epsilon^r \frac{d}{dt}\left(p^\mu c^0_{\mu r}\right)\right).$$

Vnculo primario

$$p_N = 0$$

Vnculo secundario

$$\left(p^2 + m^2 c^2\right) = 0.$$

En otras palabras el generador GAUGE se desaparece y los vnculos secund

El generador GAUGE es constante en el tiempo

Rosenfeld comprob que $\frac{d\overline{\mathcal{M}}}{dt} = 0$. En consecuencia, los coeficientes de las derivadas de tiempo de ϵ deben desaparecer, y que generalmente,

$$\overline{\mathcal{M}} = \int d^3x \left(\frac{d\epsilon^r}{dt} p^\mu c^0_{\mu r} - \epsilon^r \frac{d}{dt} \left(p^\mu c^0_{\mu r} \right) \right).$$

Vnculo primario

$$p_N = 0$$

Vnculo secundario

$$\left(p^2 + m^2 c^2 \right) = 0.$$

En otras palabras el generador GAUGE se desaparece y los vnculos secund

Rosenfeld and Dirac

Dirac to Rosenfeld, 4/26/31: "Many thanks for sending a copy of your paper on radiation theory, which I have read with great interest." (Niels Bohr Archive)

Dirac a Rosenfeld, 4/26/31: Muchas gracias por enviar una copia de su trabajo sobre la teora de radiacin, que he ledo con mucho inters. (Archivo de Neils Bohr)

Le incluyo una nota sobre su nueva teora, la cual claramente no es um zu kritisieren but nur um zu lernen.

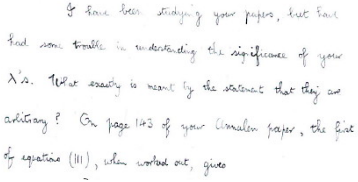
St John's College,
Cambridge.
6 - 5 - 32

Dear Rosenfeld,

Thank you very much for the paper you sent me. I found it very interesting. The connection which you give between my new theory and the Heisenberg - Pauli theory is, of course, quite general and holds for any kind of field (not merely the Maxwell kind) in any number of dimensions. This is a very satisfactory state of affairs.

Muchas gracias por el trabajo que me envi. Lo encontr muy interesante. La conexin que usted hace entre mi nueva teora y la teora de Heisenberg-Pauli, es, por supuesto, bastante general y sea aplica a cualquier tipo de campo, no solamente al tipo de Maxwell) en cualquier nmero de dimensiones. Este es un estado de asuntos muy satisfactorio. (Archivo de Niels Bohr).

Rosenfeld to Dirac, (5/10/1932) “ Acerca de la dudosa sentencia de Heisenberg-Pauli, que usted, con toda la razn no comprende, le sugiero que examine la prueba de invariancia general que presento en mi trabajo de Annaled der Physiko, 5, 113, 1930. (Yo le envi copias de ambos)


I have been studying your papers, but have had some trouble in understanding the significance of your λ's. What exactly is meant by the statement that they are arbitrary? On page 143 of your Annalen paper, the first of equations (III), when worked out, gives

Dirac to Rosenfeld, (5/16/1932) He estado estudiando sus trabajos, pero he tenido dificultades entendiendo el significado de su λs. Qu quiere decir exactamente la afirmacin que son arbitrarias? (Niels Bohr Archive)

Rosenfeld to Dirac, (5/21/1932) Con referencia a las lambdas, entran como arbitrarias o coeficientes indeterminados (dependiendo de coordinadas)en la expresin general XXXXXXX en trminos de Q's and P'sn. En la ecuacin (111) la funcin hamiltoniana debera ser igual a la de Heisenberg-Pauli (como se dice aqu),as que la sustitucin de Ps en trminos de inXXXX llevar a identidades, y esto no implica ninguna restriccin para las lambdas. (Churchill College Archive)

Impact of Rosenfeld's work

Pauli a O. Klein, (1/25/1955) Me gustara llamar su atencin al trabajo de Rosenfeld en 1930. En ese tiempo, aqu l era conocido como el hombre que cuantific el Vierbein (suena como un cuento de los hermanos Grimm, no?) Vea la parte II de este trabajo donde aparece el Vierbein. En ese tiempo se le dio mucha importancia a las identidades entre p's and q's (esto es, los campos cannicamente conjugados que aparecen de la existencia del grupo de transformaciones generales coordinadas. Todava recuerdo que yo no estaba muy contento con todos los aspectos de su trabajo puesto que el tuvo que introducir ciertas suposiciones adicionales con las que nadie estaba satisfecho. "

Remark by Dirac

Bien, creo que ahora le contestara en la misma forma que lo hice cuando le escrib que algo probablemente se haba hecho antes pero era mucho menos problema para mi presentarlo como algo nuevo que buscar una referencia. Una gran parte de mi trabajo fue asi. Frecuentemente suceda que yo pensaba que algo ya haba sido hecho antes, pero me pareca una molestia muy grande tener que mirar todas las referencias para tratar de encontrarlo. Y si no cuesta mucho trabajo publicarlo, uno lo puede hacer sin decir que es nuevo o que ha sido hecho antes.

Bergmann chronology

PHYSICAL REVIEW VOLUME 75, NUMBER 4 FEBRUARY 15, 1949

Non-Linear Field Theories

PETER G. BERGMANN
Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York

(Received June 8, 1948)

This is the first paper in a program concerned with the quantization of field theories which are covariant with respect to general coordinate transformations, like the general theory of relativity. All these theories share the property that the existence and form of the equations of motion is a direct consequence of the covariant character of the equations. It is hoped that in the quantization of theories of this type some of the divergences which are ordinarily encountered in quantum field theories can be avoided. The present paper lays the classical foundation for this program: It examines the formal properties of covariant field equations, derives the form of the conservation laws, the form of the equations of motion, and the properties of the canonical momentum components which can be introduced.

REVIEWS OF MODERN PHYSICS VOLUME 21, NUMBER 3 JULY, 1949

Non-Linear Field Theories II. Canonical Equations and Quantization*

PETER G. BERGMANN AND JOHANNA H. M. BRUNINGS
Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York

PHYSICAL REVIEW VOLUME 80, NUMBER 1 OCTOBER 1, 1950

The Hamiltonian of the General Theory of Relativity with Electromagnetic Field*

PETER G. BERGMANN, ROBERT PENFIELD, RALPH SCHILLER, AND HENRY ZATZKIS
Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York

(Received April 24, 1950)

In this paper we have given a specific example of a Hamiltonian of a non-linear field theory, a Hamiltonian density completely free of time derivatives. In accordance with the general theory developed previously, this Hamiltonian is one of the constraints between the canonical variables and, therefore, vanishes everywhere. To obtain this function, we have developed methods that will also permit the construction of Hamiltonian densities in any field theory in which the Lagrangian density is quadratic in the first derivatives. Our Hamiltonian differs from the one obtained by Schild and Pirani in that they use Dirac's method to derive a Hamiltonian that is invariant but contains velocities, so that their canonical field equations cannot be solved with respect to the time derivatives of all canonical variables. In our formalism, the canonical equations contain no time derivatives on the right-hand sides, but the adoption of a particular Hamiltonian is equivalent to the adoption of a particular coordinate condition and gauge condition. However, once we have obtained any one Hamiltonian density, we can readily obtain any other one (and thus go over to arbitrary coordinate and gauge conditions) by combination with the other constraints of the theory in question.

El vnculo hamiltoniano se obtiene a travs de una serie de transformaciones lineales que producen un vector trivial NULL para la matriz Legendre. Segundo Hamiltoniano gravitacional explcito (siguiendo a Pirani and Schild). Estos tres trabajos precedieron el descubrimiento del trabajo de Rosenfeld hecho por el estudiante de Bergmann,J.L. Anderson. Todos los trabajos siguientes de la escuela de Bergmann citan a Rosenfeld.

Dirac chronology

- Paul Dirac da conferencias sobre Dinmica hamiltoniana generalizada en Vancouver, Agosto de 1949.
  - La motivacin es la preservacin de la covariancia de Poincar a travs de la parametrizacin del espacio-tiempo plano.
  - Alfred Schild y Felix Pirani sealan la aplicabilidad de Dirac a la relatividad general.
- Las charlas de Dirac se publican en el Canadian Journal of Mathematics en 1950 y 1951.
- Pirani y Schild someten La cuantizacin de las ecuaciones de campos gravitacionales de Einstein. Febrero 1950
  - Dirac, Bergmann and Brunings (1950) cited
  - El primer hamiltoniano gravitacional explcito se publica (con nota adicionada en la impresin, explicando que el grupo de Bergmann ha obtenido los mismos resultados usando mtodos muy diferentes a los nuestros. ours")

Dirac's breakthrough

- Dirac, The theory of gravitation in Hamiltonian form, Proc. Roy. Soc. A246, 327 (1958)
  - Las derivadas de tiempo de los componentes temporales del mtrico se eliminan del Langrangiano a travs de la substraccin de una derivada total de tiempo y una divergencia espacial.
  - g^{0a} son abandonadas como variables cannicas. Bergmann hace lo mismo.

Arnowitt, Deser, and Misner

- ADM deriva la hamiltoniana Dirac en una variacin Palatini de primer orden. El primero en emplear variables de lapsos y de cambios.

Bergmann and Dirac

Dear Professor Dirac:

I have just studied your paper that appeared in the May 1 issue of the Physical Review. I am writing you, first to ask you for a reprint when they are available, but I should also like to make a few comments.

(1) The objections that Professor Lichnerowicz and I raised at the end of your lecture at Royaumont, whether or not they were valid then, certainly do not apply to the work that you have published here. Regardless of the motive of introducing the metric g_{rs} on the initial hypersurface, the canonical transformation that you first published a year ago to simplify and kill the primary constraints, is both legimate and sucessful. At this stage the total number of canonical field variables is reduced from twenty to twelve.

Figure: Excerpt of letter from Bergmann to Dirac dated October 9, 1959

(3) When I discussed your paper at a Stevens conference yesterday, two more questions arose, which I should like to submit to you: To me it appeared that because you use the Hamiltonian constraint H_L to eliminate one of the non-substantive field variables, κ , in the final formulation of the theory your Hamiltonian vanishes strongly, and hence all the final field variables, i.e. $\tilde{e}^{rs}$ $\tilde{p}^{rs}$, are "frozen" (constants of the motion). I should not consider that as a source of embarrassment, but Jim Anderson says that in talking to you he found that you now look at the situation a bit differently. Could you enlighten me? If you have no objection, I should communicate your reply to Anderson and a few other participants in the discussion.

If ~~you~~ the conditions you introduce to fix the surface are such that only one surface satisfies the conditions, then the surface cannot move at all, the Hamiltonian will vanish strongly and all dynamical variables will be frozen. However, one may introduce conditions which allow an infinity of roughly parallel surfaces. The surface can then move with one degree of freedom and there ~~will~~ must be one non-vanishing Hamiltonian that generates this motion.

I believe my condition $g_{rs}p^{rs} \approx 0$ ~~of~~ is of this second type, or maybe it allows also a more general motion of the surface corresponding roughly to Lorentz transformations. The non-vanishing Hamiltonian one would get by subtracting a divergence term from the density of the Hamiltonian.

Figure: Excerpt of response from Dirac to Bergmann, dated November 11, 1959

Estimado Profesor Dirac: Acabo de estudiar su trabajo que apareci en el nmero del primero de mayo de Physical Review. Le escribo, primero para pedirle una re-impresin cuando estn disponibles, pero tambin me gustara hacerle algunos comentarios. (1)Las objeciones que el profesor Lichmerowicz y yo hicimos al final de su presentacin en Royaumont, fueran vlidas o no en ese momento, ciertamente no se aplican al trabajo que usted ha publicado aqu. Sin considerar el motivo para introducir XXX XXXXXXXXXX mtrico/a en la hipersuperficie inicial, la transformacin cannica que usted public por primera vez hace un ao para simplificar y eliminar los vnculos primarios, es tanto legtima como exitosa. A este punto el nmero total de las variables cannicas se reduce de veinte a doce. Excerpt of letter from Bergmann to Dirac dated October 9, 1959 Fragmento de una carta de Bergmann a Dirac con fecha del 9 de octubre de 1959.

Pons, Salisbury, Shepley and Sundermeyer Formalism

- Pons, Salisbury, and Sundermeyer, "Revisiting observables in generally covariant theories in the light of gauge fixing methods", *PRD* 80, 084015,1-23 (2009)
- Pons and Salisbury, "The issue of time in generally covariant theories and the Komar-Bergmann approach to observables in general relativity", *PRD* 71, 12402 (2005)
- Pons, Salisbury, and Shepley, "Gauge Transformations in the Lagrangian and Hamiltonian Formalisms of Generally Covariant Theories", *PRD* 55, 658-668 (1997)

Projectable Legendre transformations

Projectable infinitesimal general coordinate transformations

$$\epsilon^\mu(x, \phi(x)) = n^\mu(x)\xi^0 + \delta^\mu_a \xi^a$$

with $n^\mu = (N^{-1}, -N^{-1}N^a)$, where N is the lapse and N^a the shift, and ξ^μ are arbitrary infinitesimal functions of the coordinates as well as of the fields ϕ other than the lapse and shift.

$$\epsilon(t) = N^{-1}\xi(t)$$

Projectable Legendre transformations

Projectable infinitesimal general coordinate transformations

$$\epsilon^\mu(x, \phi(x)) = n^\mu(x)\xi^0 + \delta^\mu_a \xi^a$$

with $n^\mu = (N^{-1}, -N^{-1}N^a)$, where N is the lapse and N^a the shift, and ξ^μ are arbitrary infinitesimal functions of the coordinates as well as of the fields ϕ other than the lapse and shift.

$$\epsilon(t) = N^{-1}\xi(t)$$

Generator of gauge transformations

$$G_\xi(t) = (\mathcal{H}_\mu + N^\rho C^\nu_{\mu\rho} P_\nu)\xi^\mu + P_\mu \dot{\xi}^\mu\,.$$

The $C^\nu_{\mu\rho}$ are the structure functions resulting form the algebra of the Hamiltonian $\mathcal{H}_0$ and momentum $\mathcal{H}_a$ constraints under the Poisson bracket. Note that time dependent canonical gauge transformations alter the functions λ^μ.

$$G = \xi H + p_N \dot{\xi}.$$

$$\bar{\delta} q^\mu = p^\mu \xi = \dot{q}^\mu \epsilon,$$

$$\bar{\delta} N = \dot{\xi} = N\dot{\epsilon} + \dot{N}\epsilon.$$

All spacelike time foliations are accessible and equivalent!

Generator of gauge transformations

$$G_\xi(t) = (\mathcal{H}_\mu + N^\rho C^\nu_{\mu\rho} P_\nu)\xi^\mu + P_\mu \dot{\xi}^\mu \,.$$

The $C^\nu_{\mu\rho}$ are the structure functions resulting form the algebra of the Hamiltonian $\mathcal{H}_0$ and momentum $\mathcal{H}_a$ constraints under the Poisson bracket. Note that time dependent canonical gauge transformations alter the functions λ^μ.

$$G = \xi H + p_N \dot{\xi}.$$

$$\bar{\delta} q^\mu = p^\mu \xi = \dot{q}^\mu \epsilon,$$

$$\bar{\delta} N = \dot{\xi} = N\dot{\epsilon} + \dot{N}\epsilon.$$

All spacelike time foliations are accessible and equivalent!

Gauge fixing through intrinsic coordinates

As a first step towards the explicit form of the functional invariants impose an intrinsic coordinate-dependent gauge condition,
$\chi^{(1)\mu} := x^\mu - X^\mu(x) = 0$,
where the X^μ are spacetime scalar functions of the canonical fields.
Preservation of the gauge conditions under temporal evolution leads to additional constraints
$\chi^{(2)\mu} := \delta_0^\mu - \mathcal{A}^\mu{}_\nu N^\nu \approx 0$,
where $\mathcal{A}^\mu{}_\rho := \{X^\mu, \mathcal{H}_\rho\}$.

$$\chi^1 = t - q^0 = 0.$$

$$\chi^2 = 1 - \frac{Np^0}{c} = 0$$

Gauge fixing through intrinsic coordinates

As a first step towards the explicit form of the functional invariants impose an intrinsic coordinate-dependent gauge condition,
$\chi^{(1)\mu} := x^\mu - X^\mu(x) = 0$,
where the X^μ are spacetime scalar functions of the canonical fields.
Preservation of the gauge conditions under temporal evolution leads to additional constraints
$\chi^{(2)\mu} := \delta^\mu_0 - \mathcal{A}^\mu{}_\nu N^\nu \approx 0$,
where $\mathcal{A}^\mu{}_\rho := \{X^\mu, \mathcal{H}_\rho\}$.

$$\chi^1 = t - q^0 = 0.$$

$$\chi^2 = 1 - \frac{Np^0}{c} = 0$$

Transformation by finite gauge transformation

It is possible through an appropriate rescaling of the constraints to solve for the finite descriptor of the gauge transformation to the gauge-fixed position. This transformation is then undertaken on all remaining variables. Result is

$$\mathcal{I}_\Phi \approx \Phi + \chi^{(1)\mu}\{\Phi, \overline{\mathcal{H}}_\mu\}$$

$$+\frac{1}{2!}\chi^{(1)\mu}\chi^{(1)\nu}\{\{\Phi, \overline{\mathcal{H}}_\mu\}, \overline{\mathcal{H}}_\nu\}+\cdots$$

$$\overline{H} = \frac{c}{p^0}H,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{q^i} &= q^i + \chi^1\{q^i, \overline{H}\} \\ &= q^i + (t - \frac{q^0}{c})\frac{cp^i}{p^0} \\ &= (q^i - \frac{p^i q^0}{p^0}) + \frac{cp^i}{p^0}t, \\ \mathcal{I}_{p_\mu} &= p_\mu, \\ \mathcal{I}_N &= c/p^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Transformation by finite gauge transformation

It is possible through an appropriate rescaling of the constraints to solve for the finite descriptor of the gauge transformation to the gauge-fixed position. This transformation is then undertaken on all remaining variables. Result is

$$\mathcal{I}_\Phi \approx \Phi + \chi^{(1)\mu}\{\Phi, \overline{\mathcal{H}}_\mu\}$$

$$+\frac{1}{2!}\chi^{(1)\mu}\chi^{(1)\nu}\{\{\Phi, \overline{\mathcal{H}}_\mu\}, \overline{\mathcal{H}}_\nu\}+\cdots$$

$$\overline{H} = \frac{c}{p^0}H,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{q^i} &= q^i + \chi^1\{q^i, \overline{H}\} \\
&= q^i + (t - \frac{q^0}{c})\frac{cp^i}{p^0} \\
&= (q^i - \frac{p^i q^0}{p^0}) + \frac{cp^i}{p^0}t, \\
\mathcal{I}_{p_\mu} &= p_\mu, \\
\mathcal{I}_N &= c/p^0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Evolving constants and equations of motion

- The coefficients of powers of t are invariant under arbitrary coordinate transformations (and necessarily therefore constants of the motion).
  - We have a group theoretical foundation for Carlo Rovelli's "evolving constants": Rovelli, *PRD* 42, 2638 (1990); 43, 442 (1991)
- The time dependence is naturally what one expects of the gauge-fixed solution.
- Similar expansions exist in the intrinsic spatial coordinates.

Dirac brackets, observables, and transformation to intrinsic coordinates

- Every variable has an associated invariant (including the lapse and shift)
- We have proven that the Poisson bracket algebra of the invariants is the invariant associated with the Dirac bracket

Quantization of the free relativistic particle 1

Equations of motion are

$$\frac{d}{d\,t}\mathcal{I}_{q^i} = \mathcal{I}_{\{q^i,\overline{H}\}} \approx \frac{c}{p^0}\mathcal{I}_{\{q^i,H\}} = c\frac{\mathcal{I}_{p^i}}{\mathcal{I}_{p^0}},$$

$$\frac{d}{d\,t}\mathcal{I}_{p^\mu} = \mathcal{I}_{\{p^\mu,\overline{H}\}} = 0,$$

and

$$\frac{d}{d\,t}\mathcal{I}_{N} = \mathcal{I}_{\{N,\overline{H}\}} = 0.$$

Quantization of the free relativistic particle 2

Required operator algebra is

$$\left[\mathcal{I}_{q^i}, \mathcal{I}_{q^j}\right] = 0,$$

$$\left[\mathcal{I}_{q^i}, \mathcal{I}_{p^j}\right] = i\hbar\delta^{ij},$$

$$\left[\mathcal{I}_{q^i}, \mathcal{I}_{p^0}\right] = i\hbar\frac{\mathcal{I}_{p^i}}{\mathcal{I}_{p^0}},$$

Work in a momentum representation with $\mathcal{I}_{p^0} = (\mathcal{I}_{\vec{p}^2} + m^2c^2)^{1/2}$ and Hamiltonian $H = \mathcal{I}_{p^0}c$!